Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 6

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei E ein metrischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E)$ gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable X derart, dass die Verteilung von X mit μ übereinstimmt, d.h. $\mu_X = \mu$.

(b) Für jede Wahl $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{P}(E)$, $n \geq 1$ gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mu_{X_j} = \mu_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $g \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \frac{e^{-\frac{|x+y|^2}{4\alpha}}}{(4\pi\alpha)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{d}y \longrightarrow g(-x), \quad \alpha \to 0.$$

Hinweis: Führen Sie eine geeignete Substitution durch und zeigen Sie, dass $\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4\alpha}}}{(4\pi\alpha)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{d}y$ schwach gegen $\delta_0(\mathrm{d}y)$ konvergiert für $\alpha \to 0$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq \mu(\mathbb{R}^d)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(b) $\widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$.

(c) $\widehat{\mu}$ ist gleichmässig stetig.

(d) $\widehat{\mu}$ ist positiv (semi-)definit.

Hinweis: Gehen Sie analog zu dem Beweis aus der Vorlesung vor.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie $\widehat{\mu}(\xi)$ für die folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$

(a) $\mu(\mathrm{d}x) = \mathbb{1}_{(-a,a)}(x) \frac{1}{2a} \mathrm{d}x$ mit $a > 0$.

(b) $\mu(\mathrm{d}x) = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k(\mathrm{d}x)$ mit $\lambda > 0$.

(c) $\mu(\mathrm{d}x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \mathrm{d}x$ mit $\lambda > 0$.

(d) $\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\delta_{-1}(\mathrm{d}x) + \frac{1}{2}\delta_1(\mathrm{d}x)$.

Hinweis: Direkt nachrechnen.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*
Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mu_X(\mathrm{d}x) = p(x)\mathrm{d}x$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Angenommen es gilt $p(x) = p(-x)$ (d.h. X und $-X$ haben diesselbe Verteilung). Zeigen Sie, dass die Verteilung von $Y := X^2$ eine Dichte q hat, welche gegeben ist durch.

$$q(y) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \frac{p(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}.$$

(b) Angenommen $p(x) = 0$ für $x < 0$ (d.h. $X \geq 0$). Zeigen Sie, dass die Verteilung von $Y := \sqrt{X}$ eine Dirchte hat und diese gegeben ist durch

$$q(y) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) 2yp(y^2).$$

(c) Angenommen $p(x) = 0$ für $x < 0$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $Y := \log(X)$ eine Dichte hat und die Dichte gegeben ist durch

$$q(y) = e^y p(e^y).$$

(d) Zeigen Sie, dass $Y := e^X$ eine Dichte hat und die Dichte gegeben ist durch

$$q(y) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \frac{p(\log(y))}{y}.$$

(e) Angenommen $p(x) = 0$ für $x < 0$. Zeigen Sie, dass $Y := \frac{X}{1+X}$ eine Dichte hat und diese Dichte gegeben ist durch

$$q(y) = \mathbb{1}_{[0,1)}(y) \frac{1}{(1-y)^2} p\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Hinweis: Formen Sie $\mathbb{E}(f(Y))$ geeignet um, wo f eine beliebige beschränkte messbare Funktion ist. Schließen Sie daraus die Behauptung.